



گزینه ۱

۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، در این صورت حاصل $[x] + [-x] = -1$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -1$$

گزینه ۲

۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ 1 + \sqrt[3]{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \\ x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-4, +\infty) - \{-2\}$$

بنابراین تنها در $x = -2$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۱ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} + 1 \right]$$

$$= \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 = 2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1$$

عبارت خطی $x - \frac{1}{3}$ در نقاط صحیح کننده $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right\}$ از بازه $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^+} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 [(-2)^+] + 1 = 2(-2) + 1 = -3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{3})^-} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^- \right] + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = 3$$

پس f در $-\frac{5}{3}$ پیوستگی راست و در $\frac{5}{3}$ پیوستگی چپ دارد. در نهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۳ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3} + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$f(x) = [x] \sin \pi x ; \quad x \in [-2, 2]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما از آنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مجهول}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\cancel{\sin x - 1})}{-\cancel{(\sin x - 1)}(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2 \sin x + 1}{\sin x + 1} \right) = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)[x] & ; -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & ; x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2-1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + 2a + b = 1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0-1)[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} a = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$ ، بایستی در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+2)}{2+1} = 4$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از قاعده هوییتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

حال برای پیوستگی f در $x = 2$ ، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2.5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$f(-2) = a$: مقدار تابع

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x+2)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 2x + 4) = -(4 + 4 + 4) = -12$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -12$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\text{حد راست : } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 + \cos \pi x)(1 - \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع f به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -1 < x < 1 \\ ax + b & ; (x \geq 1) \vee (x \leq -1) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصله $(-1, 1)$ و تابع $ax + b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در 1 و -1 پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = 0$$

f در $x = 1$ پیوسته است، پس $a + b = 0$ یا $a = -b$ است. از طرفی f در -1 پیوسته است؛ پس:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = (-1)[(-1)^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\Rightarrow -a + b = 1 \xrightarrow{b=-a} -a - a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x = 0$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ است.

گام دوم

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{1-0} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

تابع در $x = 1$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{a+3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1+a$$

$$\Rightarrow 1+a = \sqrt{a+3} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a+3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \checkmark \\ a = -2 & \times \end{cases}$$

به ازای $a = -2$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{3}{4})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+3} = \sqrt{x+3}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a \log_2^e = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a+1 \end{cases} \Rightarrow 3a+1 = 2a \Rightarrow a = -1$$

$$x < 3 : f(x) = ax + 2^{x-3} = -x + 2^{x-3}$$

$$f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -1.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

شرط پیوستگی تابع در نقطه $x = 1$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

بنابراین داریم:

$$f(1) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

پس به ازای هر مقدار a ، تابع در $x = 1$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

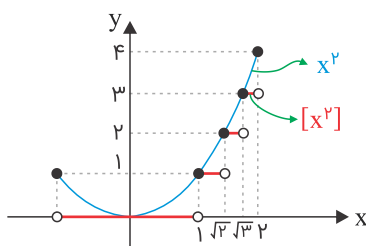
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ ، رسم نمودار این تابع در بازه موردنظر است:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x = -1$ ، $x = \sqrt{2}$ ، $x = \sqrt{3}$ ، $x = 2$ و $x = -1$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازه $[-1, 2]$ دارای پنج نقطه ناپیوستگی است.

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \cos^3 x = a \cos^3 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos^3 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow \sqrt{2} a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

اگر $x = 2k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin \frac{\pi}{2}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و در نتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = 2k + 1$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطه فردی مانند $x = 1$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^0 \sin \frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

$$f(1) = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ در اعداد فرد ناپیوسته است

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

حد صورت مسئله ابهام $\frac{0}{0}$ است که باید باتوجه به فرمول‌های مثلثاتی، عامل صفرشونده را با یک شکل یکسان در صورت و مخرج کسر بسازیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x + 3 \cos x}{2 \cos x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x}{2 \cos x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-(2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2)}{2 \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-(2 \cos x + 1)(\cos x - 2)}{\cancel{2 \cos x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} -(\cos x - 2) = -\left(-\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حد راست و چپ تابع f در $x = 3$ برابر است (به ترتیب ۱۵ و ۱۲ می‌باشد). پس تابع f در این نقطه، حد ندارد. برای آنکه تابع $f.g$ حد داشته باشد، باید حد g در این نقطه صفر باشد که $g(x)$ نقش عامل صفرشونده را بازی کند. با این کار وقتی صفر در دو عدد متفاوت ضرب می‌شود، صفر خواهد شد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (kx + 6) = 0 \Rightarrow 3k + 6 = 0 \Rightarrow k = -2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر علوم تجربی یازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه‌های اول و آخر همواره در محدوده تعریفشان پیوسته‌اند. در ضابطه وسط به دلیل اینکه $x = 2$ داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند، نقطه ناپیوسته محسوب می‌شود. اما بررسی نقاط مرزی:

$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - 1| = 0 \\ f(1) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

درنتیجه در $x = 1$ پیوسته است.

$$x = 3 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - [x]) = 3 - 2 = 1 \\ f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 4) = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

بنابراین در $x = 3$ پیوسته است.

پس این تابع در هر دو نقطه مرزی پیوسته بوده و فقط در $x = 2$ ناپیوسته است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی یازدهم

باید حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = 0$ با مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} - 4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} - 4 = a - 4 \\ f(0) = b + \left[0 - \frac{7}{4}\right] = b + \left[-\frac{7}{4}\right] = b - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + 4 = [0^-] + 4 = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} a - 4 = 3 \Rightarrow a = 7 \\ b - 4 = 3 \Rightarrow b = 7 \end{cases} \Rightarrow a + b = 14$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

نکته:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin(-x) \cos 2x}{\sqrt{2(1 + \cos x)}} = \frac{0}{0} \quad (\text{مجهول})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin(-x) \cos 2x}{\sqrt{2(1 + \cos x)}} = -2 \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x \cos 2x}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = - \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos \frac{x}{2}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - 2$ ، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6 - x^2 - x}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = \frac{-5}{2}\end{aligned}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(2 - \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(3x+2)(\cancel{2 - \sqrt{x}})(2 + \sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(\cancel{2 - \sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow 4} (-(3x+2)(2 + \sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)) \\ &= -14 \times 4 \times 2 = -112\end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{3} - \sqrt{x}}} = \frac{14}{\frac{-2 \times 2}{2}} = -14 \times 2 = -112$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \frac{1}{2^{-1+2n}} \rightarrow 0 \\ 2^{2n+1} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه حل اول:

با استفاده از قاعدهٔ ل‌ه‌وپل، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} - 1)}{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} - 1}{2^{4n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{4n} + 3) - 3}{(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{3}{2^{4n} + 3}}_0 = 1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 3^{-n+1} = \frac{1}{3^{n-1}} \rightarrow 0 \\ 3^n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 3^{-n+1}}{2 \times 3^n + 3^{-n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 3^{-n+1}}{2 \times 3^n + 3^{-n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{2 \times 3^n} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 3^{-n+1}}{2 \times 3^n + 3^{-n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{-n+1}(3^{2n-1} - 1)}{3^{-n+1}(2 \times 3^{2n-1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n-1} - 1}{2 \times 3^{2n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3^{2n-1}}(1 - \frac{1}{\cancel{3^{2n-1}}})}{\cancel{3^{2n-1}}(2 + \frac{1}{\cancel{3^{2n-1}}})} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{3^{n-1}} \rightarrow 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(\frac{1}{\gamma}) = 0$ ، بنابراین:

$$2(\frac{1}{\gamma})^4 + a(\frac{1}{\gamma})^3 + 2(\frac{1}{\gamma})^2 - 3(\frac{1}{\gamma}) = 0 \Rightarrow 2(\frac{1}{16}) + a(\frac{1}{8}) + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 1 = 0 \Rightarrow a = 7$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = 2$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجه صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = 3$ است. همچنین طبق قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.
روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) (4x^2 - 4x - 2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 8x + 4)} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 6x^2 + 1 & x - \frac{1}{2} \\ \hline -4x^3 + 2x^2 & \\ \hline -4x^2 + 1 & \\ 4x^2 - 2x & \\ \hline -2x + 1 & \\ 2x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 - 2 & x - \frac{1}{2} \\ \hline -2x^3 + x^2 & \\ \hline 8x^2 - 2 & \\ -8x^2 + 4x & \\ \hline 4x - 2 & \\ -4x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم: هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$.

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$.

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p(x^2) + 4p(-x) &= p(2^2) + 4p(-2) \\ &= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7 \end{aligned}$$

راه حل اول: با استفاده از هوییتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} &= \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

راه حل دوم: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 7\sqrt{x} + 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{4x^2 - 3x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(x - 1)(4x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x} + 1)(4x + 1)} \\ &= \frac{-3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1) = 8$ و $P(-\frac{1}{2}) = 5$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + R(x) = ((x-1)(2x+1))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(1) = R(1) = a + b = 8$$

$$P(-\frac{1}{2}) = R(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{2}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2, \quad b = 8 - 2 = 6$$

$$R(x) = 2x + 6 \text{ پس:}$$

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x^n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x} = \frac{a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x - 1} \times \frac{\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}{\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{27}x^3 - x^2 + 1}{(x - 1)\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{27}x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right)}{\cancel{(x - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{1 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{2}{27} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{\frac{1}{27}x^3 - x^2 + 1}{\frac{1}{27}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3}} \quad \left| \quad \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{27}x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3}} \right.$$

$$\frac{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}$$

$$-\frac{1}{9}x^2 + 1$$

$$+\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{27}x$$

$$-\frac{1}{27}x + 1$$

$$+\frac{1}{27}x - 1$$

۰

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}}{4}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{4 - 3}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۲

۳۵

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۲

۳۶

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(a + 2)}{2x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}} \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \times \frac{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4x^2 - 5}{2(x + 1)(-3 - \sqrt{4 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5(x - 1)(x + 1)}{12(x + 1)} = \frac{5}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

چون $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = 2$ مثبت و به ازای $x = 2$ صفر شود. یعنی معادله $x^2 + ax + b = 0$ باید ریشه مضاعف $x = 2$ داشته باشد و در نتیجه:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

با مقایسه دو عبارت $x^2 + ax + b$ و $x^2 - 4x + 4$ نتیجه می‌شود که $a = -4$ و $b = 4$ ، پس $a + b = 0$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(2 + \sqrt[3]{x})(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(x + 8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6} = \frac{-6 \times 12}{6} = -12$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\text{HOP : } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times 4}} = -6 \times 2 = -12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} = \frac{0}{0}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} &\times \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})}{4 - (2 + \sqrt{3 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})}{2 - \sqrt{3 - x}} \times \frac{2 + \sqrt{3 - x}}{2 + \sqrt{3 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})(2 + \sqrt{3 - x})}{4 - 3 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})(2 + \sqrt{3 - x}) = 1(2+2)(2+2) = 16 \end{aligned}$$

راه حل دوم: (فرا تر از کتاب)

استفاده از قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

می‌دانیم $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ و $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ حال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^\pm} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} &= \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^\pm} = \pm\infty \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

راه حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2 + bx + c} &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 2 \left| x + \frac{1}{4} \right|) \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 2(x + \frac{1}{4})) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

راه حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + x})(2x - \sqrt{4x^2 + x})}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = 3
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$x + 1 < 3 < 2x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 < 3 \Rightarrow x < 2 \\ 2x - 1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸